ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Н. М. Фирстова

Самарский Государственный Аэрокосмический Университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)
firstova.natalia@yandex.ru

Работа посвящена исследованию модели электрохимического реактора методом интегральных многообразий и численными методами. Изучено поведение решений системы в зависимости от значений параметров, рассмотрена возможность бифуркации Андронова-Хопфа и явления «уточного взрыва».

Математическая модель электрохимического реактора в безразмерном виде представляет собой сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta + 1 - u = f(\mathrm{u},\theta), \\ \beta\dfrac{d\theta}{dt} = k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta - k_e e^{\alpha_0 fE}\theta = g(\mathrm{u},\theta). \end{cases} \tag{1.1}$$

Исследование модели было проведено с помощью методов теории сингулярных возмущений.

Уравнение медленной кривой и координаты точек срыва для исследуемой системы определяются соответственно формулами (1.2) и (1.3)

$$u = \frac{(k_d e^{-\gamma\theta/2} + k_e e^{\alpha_0 fE})\theta}{k_a e^{\gamma\theta/2}(1-\theta)}, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta - k_e e^{\alpha_0 fE}\theta = 0, \\ k_a e^{\gamma\theta/2} u\left((1-\theta)\dfrac{\gamma}{2} - 1\right) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\left(1 - \dfrac{\gamma\theta}{2}\right) - k_e e^{\alpha_0 fE} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Исследовалась форма медленной кривой в зависимости от соотношений параметров, и было установлено, что возможны три случая.

В случае, когда γ меньше 4, точек перегиба нет, производная в любой точке медленной кривой отрицательна, а значит, медленная кривая полностью устойчива. Все траектории системы (1.1) притягиваются к медленной кривой со скоростью быстрой переменной и далее следуют вдоль нее со скоростью медленной переменной.

Случай, когда γ приближенно равна 4, аналогичен предыдущему, за исключением того, что медленная кривая имеет точку перегиба, которая не влияет на знак производной.

В случае же, когда γ больше 4, медленная кривая принимает S-образную форму, и у нее есть две точки срыва. При этом участки F_1 и F_3 устойчивы, а F_2 – неустойчив. Траектории системы (1.1), выпущенные из начальной точки, лежащей в области влияния устойчивого участка медленной прямой F_1 или F_3, будут притягиваться к ним со скоростью быстрой переменной порядка $O(1/\beta)$ при β стремящейся к 0 и далее следовать вдоль нее со скоростью медленной переменной порядка $O(1)$ при β стремящейся к 0. Дойдут ли они до точки срыва и сорвутся с медленного интегрального многообразия, будет зависеть от того, какие особые точки имеет система (1.1), какого они типа и где расположены.

Для качественного исследования поведения системы были исследованы особые точки.

В зависимости от соотношения параметров тип особой точки меняется. При γ меньше или равной 4 тип особой точки – устойчивый узел. При γ больше 4, тип особой точки – устойчивый фокус. При изменении параметров точка меняет свое положение, сливается с точкой срыва и становится неустойчивой. В случае неустойчивой особой точки в системе наблюдаются релаксационные колебания.

Случай, когда особая точка совпадает с точкой срыва, представляется наиболее интересным. При незначительных изменениях управляющего параметра особая точка перемещается с устойчивой части медленной кривой на ее неустойчивую часть, оставаясь в малой окрестности точки срыва. Особая точка становится неустойчивым фокусом и от нее отделяется замкнутая траектория. Такое явление называется бифуркацией Андронова-Хопфа. Сначала эта отделившаяся траектория практически совпадает с теперь уже неустойчивой особой точкой, но по мере того, как мы будем изменять значение управляющего параметра, амплитуда периодического решения (предельного цикла) будет расти (пропорционально квадратному корню от приращения параметра). Этот предельный цикл устойчив и, значит, другие траектории системы будут стремиться к нему при времени t стремящемся к бесконечности. Эти траектории имеют устойчиво-неустойчивые участки медленного движения, т.е. они являются локальными траекториями – утками. Сам устойчивый предельный цикл также является траекторией – уткой (цикл – утка). Это означает, что именно «уточное» значение параметра может рассматриваться как граница безопасного протекания процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
2. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.
3. *Соболев В.А, Щепакина Е.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 319 с.
4. *Холодниок М., Клич А.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. –М.: Наука, 1991. –368с.
5. *Berthier, F., Diard, J.-P., Nugues, S.* On the nature of the spontaneous oscillations observed for the Koper-Sluyters electrocatalitic reaction. Journal of Electroanalytical Chemistry, 1997. Vol. 436. No. 1. Pp. 35-42
6. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций. М.: ВИНИТИ, 1968. 218 с.